

**План ответа на вопросы к экзамену по математическому анализу.
ВМК, 1 курс, 1 поток, 2023 – 2024 учебный год**

1. *Понятие множества. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Инъекция, сюръекция, биекция. Счетные множества (примеры и свойства). «Наивное» определение множества (можно с комментарием о том, что оно может приводить к парадоксам, но не в рамках нашего курса). Определение элемента множества, равенства множеств, подмножества, пустого множества. Перечисление основных операций над множествами (можно привести какие-то свойства, самые основные). Определение декартова произведения множеств и отображения. Определение инъекции, сюръекции и биекции (можно привести какой-нибудь простой пример). Определение равномощных (эквивалентных) множеств, определение счетного множества. Доказательство счетности множеств целых и рациональных чисел. Утверждения о том, что любое подмножество счетного множества не более чем счетно и о том, что не более чем счетное объединение не более чем счетных множеств не более чем счетно (с доказательствами).*
2. *Понятие мощности множества (примеры и свойства). Пример несчетного множества. Понятие мощности континуум. Неэквивалентность множества и множества всех его подмножеств. Понятие мощности множеств (можно начать с определения биекции, так как оно тут используется). Примеры и свойства «защиты» в само определение: мощность пустого множества равна нулю, мощность конечного множества равна числу его элементов, множества имеют одинаковую мощность тогда и только тогда, когда между ними можно установить биекцию, мощность множества A меньше мощности множества B , тогда и только тогда, когда A эквивалентно некоторому подмножеству множества B , но не эквивалентно самому множеству B . Дальше можно сказать, что мы уже знаем счетные множества и привести пример. Потом теорема: множество N всех бесконечных наборов из нулей и единиц не является счетным (с доказательством). Определение мощности континуума: можно сказать, что это как раз мощность множества N , либо сказать, что это мощность множества I всех точек отрезка $[0, 1]$, а потом сказать, что множества I и N эквивалентны (без доказательства). Теорема о том, что множество всех подмножеств данного множества не эквивалентно самому множеству (с доказательством). Можно упомянуть о том, что множество N эквивалентно множеству всех подмножеств счетного множества (в качестве иллюстрации).*
3. *Понятие вещественного числа. Принцип полноты множества вещественных чисел. Понятие вещественного числа как бесконечной десятичной дроби (можно в качестве геометрической иллюстрации говорить о числовой прямой, но не обязательно). Понятие положительного и отрицательного числа. Стоит упомянуть о том, что рациональные числа можно интерпретировать как бесконечные периодические дроби (для конечных – ноль в периоде). Правила сравнения вещественных чисел, утверждение о транзитивности знаков равно/больше/меньше (с доказательством). Определение ограниченного (сверху, снизу) множества. Определение точной верхней грани (ТВГ) и точной нижней грани (ТНГ) для ограниченного сверху/снизу множества. Принцип полноты Вейерштрасса: любое непустое ограниченное сверху/снизу множество имеет ТВГ/ТНГ (с доказательством).*
4. *Свойства рациональных чисел. Приближение вещественных чисел рациональными. 16 свойств рациональных чисел (без доказательства). Три леммы о приближении вещественных чисел рациональными: любое вещественное число можно зажать между двумя рациональными со сколь угодно малой разницей, между любыми двумя различными вещественными числами можно поместить одно (а значит, и сколько угодно) рациональное, если два вещественных числа можно зажать между одной и той же парой рациональных со сколь угодно малой разницей, то они равны (все с доказательствами).*
5. *Ограниченные и неограниченные последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности, их связь. Основные свойства (ограниченность БМП, произведение ограниченной на БМП, арифметические свойства БМП). Определение числовой последовательности. Определение ограниченной (сверху, снизу) последовательности. Определение неограниченной последовательности. Определение бесконечно большой последовательности. Определение бесконечно малой последовательности. Стоит привести по примеру на каждый тип последовательности и знать о связи между ними: любая бесконечно*

малая ограничена, обратное неверно, вообще говоря; любая бесконечно большая является неограниченной, обратное неверно, вообще говоря. Теорема: линейная комбинация БМП снова является БМП (с доказательством). Теорема: произведение БМП и ограниченной последовательности снова является БМП (с доказательством). Теорема: любая БМП ограничена (с доказательством). Теорема: если все члены БМП, начиная с некоторого номера, равны одному и тому же числу, то это число – ноль (с доказательством). Теорема о связи БМП и ББП (с доказательством).

6. *Понятие сходящейся последовательности. Основные теоремы о сходящихся последовательностях (единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, арифметические операции над сходящимися последовательностями).* Определение сходящейся последовательности (лучше рассказать все три – через связь с бесконечно малой, через ε и N и через окрестности). Теорема о единственности предела сходящейся последовательности (с доказательством). Теорема об ограниченности сходящейся последовательности (с доказательством). Теорема об арифметических операциях над сходящимися последовательностями (с доказательством).
7. *Предельный переход в неравенствах для последовательностей. Принцип двусторонней ограниченности для последовательностей.* Теорема: если все элементы сходящейся последовательности, начиная с некоторого номера, больше или равны какому-либо числу, то и ее предел больше или равен этого числа (с доказательством). Следствие: если все элементы одной сходящейся последовательности, начиная с некоторого номера, больше или равны соответствующих элементов другой сходящейся последовательности, то и пределы связаны тем же неравенством (с доказательством). Теорема о двух милиционерах (принцип двусторонней ограниченности) для последовательностей (с доказательством).
8. *Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности (теорема Вейерштрасса). Лемма о системе стягивающихся сегментов.* Определение неубывающей/невозрастающей и возрастающей/убывающей последовательности. Понятия монотонности и строгой монотонности. Теорема Вейерштрасса: монотонная ограниченная последовательность сходится (с доказательством). Определение системы стягивающихся сегментов (отрезков): система вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Утверждение: любая система стягивающихся сегментов имеет единственную общую точку (с доказательством). Не обязательно рассказывать в этом вопросе, но полезно понимать: если длины отрезков не стремятся к нулю, то в пересечении не единственная точка, а целый отрезок; если заменить отрезки на интервалы, то общей точки может и не быть (в пересечении – пустое множество).
9. *Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности (теорема Вейерштрасса). Число e .* Определение неубывающей/невозрастающей и возрастающей/убывающей последовательности. Понятия монотонности и строгой монотонности. Теорема Вейерштрасса: монотонная ограниченная последовательность сходится (с доказательством). Бином Ньютона (без доказательства). Утверждение: последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, возрастает и ограничена сверху (с доказательством). Определение числа e как предела последовательности $\{x_n\}$.
10. *Понятие предельной точки последовательности, понятие подпоследовательности. Эквивалентность двух определений предельной точки. Теорема Больцано-Вейерштрасса.* Определение подпоследовательности данной последовательности. Утверждение: если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу (с доказательством). Два определения предельной точки последовательности: через подпоследовательности и через окрестности. Утверждение: эти определения эквивалентны (с доказательством). Теорема Больцано-Вейерштрасса (в качестве доказательства можно сослаться на теорему из 11 вопроса, а можно привести доказательство через стягивающиеся сегменты – это будет красиво).
11. *Понятие верхнего и нижнего предела последовательности. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов у ограниченной последовательности. Критерий сходимости числовой последовательности через верхний и нижний пределы.* Определение верхнего и нижнего пределов последовательности. Теорема: любая ограниченная последовательность имеет конечные верхний и нижний пределы (с доказательством). Следствие: последовательность

сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и ее верхний и нижний пределы равны (с доказательством).

12. *Определение и свойства фундаментальной последовательности. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (критерий Коши).* Определение фундаментальной последовательности. Утверждение: фундаментальная последовательность ограничена, там же доказывается еще одно свойство — для любого положительного ε найдется элемент последовательности, в ε — окрестности которого лежат все элементы с большими номерами (с доказательством). Критерий Коши сходимости последовательности (с доказательством).
13. *Два определения предельного значения функции (по Гейне и по Коши) и доказательство их эквивалентности. Критерий Коши существования предельного значения функции.* Определение функции одной переменной, ее аргумента, значения, области определения, множества значений. Определение предельной точки множества. Определения предела функции в точке (которая является предельной точкой области определения функции) по Гейне и по Коши. Теорема: эти определения эквивалентны (с доказательством). Определение: функция удовлетворяет условию Коши в данной точке. Теорема: критерий Коши существования предела функции в точке (с доказательством). Комментарий: было много вариантов определения предела (конечного, бесконечного, справа, слева и т.д.) В этом билете достаточно дать определения того, что функция имеет конечный предел в конечной точке и на плюс/минус бесконечности; то же самое для условия Коши. Доказательства теорем достаточно провести для случая предела в конечной точке.
14. *Арифметические операции над функциями, имеющими предельное значение. Предельный переход в неравенствах, принцип двусторонней ограниченности для функций. Локальная ограниченность функции, имеющей конечный предел в точке.* Теорема: арифметика пределов функции (с доказательством). Теорема: если функции имеют конечные пределы в данной точке и одна из них меньше или равна другой в некоторой проколотой окрестности этой точки, то и пределы связаны тем же соотношением (с доказательством). Теорема о двух милиционерах для функций (с доказательством). Теорема: если функция имеет конечный предел в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, пересеченной с областью определения (с доказательством).
15. *Бесконечно малые и бесконечно большие (в данной точке) функции и принципы их сравнения. Арифметика o -символики.* Определение бесконечно малой в данной точке функции. Определения: одна из бесконечно малых в данной точке функций имеет больший порядок малости, чем другая; функции имеют одинаковый порядок малости; функции эквивалентны в данной точке. Определение бесконечно большой в данной точке функции. Определения: одна из бесконечно больших в данной точке функций имеет больший порядок роста, чем другая; функции имеют одинаковый порядок роста в данной точке. Будет хорошо, если на каждое определение приведете какой-нибудь несложный пример. Определения: $f(x) = O(1), f(x) = O(g(x)), f(x) = O^*(g(x))$ при $x \rightarrow a$; примеры. Теорема: сумма/разность/произведение бесконечно малых в данной точке функций есть бесконечно малая функция; произведение бесконечно малой и ограниченной есть бесконечно малая (с доказательством).
16. *Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Классификация точек разрыва. Арифметические операции над непрерывными функциями. Локальная ограниченность функции, непрерывной в точке.* Определения непрерывности функции в точке: формальное, по Гейне и по Коши (доказывать эквивалентность не нужно, достаточно сослаться на эквивалентность соответствующих определений предела). Можно упомянуть о том, что в изолированных точках области определения функцию по умолчанию считаем непрерывной, но в дальнейшем будем проводить рассуждения для случая, когда данная точка является предельной точкой области определения. Определение непрерывности функции на множестве. Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва (с примерами). Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями (с доказательством). Теорема о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке (с доказательством).
17. *Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Теорема о сохранении знака функцией, непрерывной в точке. Определение композиции функций. Непрерывность сложной функции.* Определения непрерывности функции в точке: формальное, по Гейне и по Коши (доказывать эквивалентность не нужно, достаточно сослаться на эквивалентность

соответствующих определений предела). Можно упомянуть о том, что в изолированных точках области определения функцию по умолчанию считаем непрерывной, но в дальнейшем будем проводить рассуждения для случая, когда данная точка является предельной точкой области определения. Определение непрерывности функции на множестве. Теорема о сохранении знака функцией, непрерывной в точке (с доказательством). Определение композиции функций (сложной функции). Теорема о непрерывности сложной функции (с доказательством).

18. *Понятие функции, непрерывной на отрезке. Прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.* Определение: функция непрерывна на отрезке. Теорема: если функция непрерывна на отрезке и имеет разные знаки в концах отрезка, то она проходит через ноль (с доказательством). Следствие: прохождение непрерывной на отрезке функции через любое промежуточное значение между значениями в концах отрезка (с доказательством). Определение функции, ограниченной на данном множестве. Определение точной верхней и точной нижней граней функции на множестве. Первая и вторая теорема Вейерштрасса (с доказательствами).
19. *Определение монотонной функции. Теорема о точках разрыва монотонной функции. Критерий непрерывности монотонной функции.* Определение невозрастающей/неубывающей и возрастающей/убывающей функции. Понятия монотонности и строгой монотонности. Теорема: функция, определенная и монотонная всюду на отрезке, может иметь на этом отрезке разрывы только первого рода (в граничных точках отрезка отождествляем разрывы первого рода и устранимые, так как там пределы есть только с одной стороны). Доказательство достаточно провести для внутренней точки отрезка, сказав, что в концах отрезка все аналогично, но там рассматриваем только односторонние пределы. Теорема: критерий непрерывности монотонной функции (с доказательством).
20. *Понятие обратной функции, примеры. Теорема об обратной функции.* Определение обратной функции. Теорема: если функция непрерывна и строго монотонна на отрезке, то множеством ее значений является отрезок, на котором определена обратная функция, причем обратная функция также непрерывна и строго монотонна (с доказательством). Далее хорошо бы привести два примера: пример непрерывной и строго монотонной функции и обратной к ней и пример разрывной и не являющейся монотонной функции, у которой тем не менее существует обратная (то есть продемонстрировать, что теорема является достаточным условием, но не критерием).
21. *Определение и основные свойства логарифмической, показательной и степенной функции.* В этом вопросе считаем, что экспонента e^x уже определена и ее свойства известны (этот материал мы отработали на коллоквиуме, на экзамен он не выносится). Нужно определить сначала натуральный логарифм как обратную функцию к экспоненте, перечислить его свойства, ссылаясь на теорему об обратной функции. Потом определить $a^x := e^{x \ln a}$, перечислить свойства, ссылаясь на теорему о непрерывности сложной функции. Потом определить логарифм по произвольному основанию как обратную к показательной, перечислить свойства. Наконец, определяем произвольную степенную функцию $x^a := e^{a \ln x}$ и перечисляем свойства. Кроме того, нужно уметь нарисовать эскиз графика каждой из этих функций.
22. *Определение и основные свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций.* Определение тригонометрических функций (синуса и косинуса – как координат точки на единичной окружности, являющимися функциями угла; тангенса и котангенса – через отношение синуса и косинуса). Далее нужно перечислить основные свойства этих функций (кроме непрерывности, все без доказательства). Доказать нужно вспомогательную лемму $|\sin x| \leq |x|$, через нее – непрерывность синуса. Непрерывность косинуса – аналогично или через формулы приведения, непрерывность тангенса и котангенса – через теорему о непрерывности частного. Далее нужно дать определение обратных тригонометрических функций (как обратных на соответствующих промежутках) и перечислить их свойства, ссылаясь на теорему об обратной функции. Кроме того, нужно уметь нарисовать эскиз графика каждой из этих функций.
23. *Замечательные пределы.* Теорема: первый замечательный предел (с доказательством). Следствие: $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \rightarrow 0$ (с доказательством). Теорема: второй замечательный предел (с доказательством). Следствие: $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $x \rightarrow 0$ (с доказательством).

24. *Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора.* Определение равномерной непрерывности функции на множестве. Теорема Кантора (с доказательством). Не обязательно писать при ответе на вопрос, но полезно понимать: из равномерной непрерывности на множестве следует непрерывность в каждой точке множества (сразу вытекает из определения). Обратное, вообще говоря, справедливо только для отрезка (а точнее, для замкнутого ограниченного множества). Полезно помнить простые примеры: функция $y = 1/x$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на интервале $(0, 1)$; функция $y = x^2$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на неограниченном промежутке $[0, +\infty)$.
25. *Понятие производной и дифференцируемости функции в точке. Связь дифференцируемости и непрерывности. Односторонние производные. Критерий дифференцируемости. Геометрический смысл производной.* Определение производной функции в точке. Определение левой и правой производной. Утверждение о том, что производная в точке существует тогда и только тогда, когда односторонние производные совпадают (с доказательством). Стоит привести пример функции $y = |x|$, у которой производные справа и слева различные. Определение дифференцируемости функции в точке. Теорема: из дифференцируемости в точке следует непрерывность в этой точке (с доказательством). Замечание о том, что обратное, вообще говоря, неверно (пример – тот самый модуль). Критерий дифференцируемости: функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда у нее в этой точке существует конечная производная (с доказательством). Определение касательной к графику функции в данной точке. Теорема о геометрическом смысле производной (с доказательством). Уравнение касательной.
26. *Правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций, сложной функции и обратной функции. Формулы дифференцирования простейших элементарных функций.* Теорема: производная суммы, разности, произведения и частного (с доказательством). Теорема о производной сложной функции (с доказательством). Теорема о производной обратной функции (с доказательством). Производные простейших элементарных функций (стоит вывести производную синуса и экспоненты через первый и второй замечательный предел соответственно и, например, производную арктангенса, чтобы продемонстрировать работу с обратными функциями).
27. *Первый дифференциал функции. Инвариантность его формы. Геометрический первый смысл дифференциала. Первая производная функции, заданной параметрически.* Определение дифференцируемости функции в точке. Определение первого дифференциала. Теорема: инвариантность формы первого дифференциала (с доказательством). Геометрический смысл первого дифференциала (приращение касательной). Стоит здесь нарисовать картинку, подписать точки и пояснить, почему так получается (через уравнение касательной). Понятие функции, заданной параметрически. Теорема – формула для вычисления первой производной параметрически заданной функции (с доказательством).
28. *Производные высших порядков, формула Лейбница. Вторая производная функции, заданной параметрически. Производные высших порядков показательной, степенной, логарифмической функции, синуса и косинуса.* Определение производной высокого порядка в данной точке. Теорема: формула Лейбница для вычисления производной от произведения функций (с доказательством). Понятие функции, заданной параметрически. Теорема – формула для вычисления второй производной параметрически заданной функции (с доказательством). Вывод формулы производной высокого порядка для показательной функции, степенной функции, логарифма и синуса (по индукции). Для косинуса можно сказать, что аналогично.
29. *Понятие возрастания (убывания) в точке и локального экстремума функции. Достаточное условие возрастания (убывания) и необходимое условие экстремума дифференцируемой в данной точке функции. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.* Определение: функция возрастает/убывает в данной точке. Теорема: достаточное условие возрастания/убывания функции в точке (с доказательством). Определение локального экстремума (строгого, нестрогого) в данной точке. Теорема Ферма: необходимое условие (нестрогого) экстремума (с доказательством). Полезно помнить пример с функцией $y = x^3$, которая возрастает в нуле, хотя ее производная в этой точке равна нулю (это сразу пример того, что первая теорема дает только достаточное условие, а вторая – только необходимое). Теорема: если функция f дифференцируема на интервале (A, B) , отрезок $[a, b]$ принадлежит этому

интервалу, и $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, то на интервале (a, b) найдется точка, производная в которой обратится в ноль (с доказательством). Следствие: теорема Дарбу о том, что производная принимает все промежуточные значения между значениями в концах отрезка (с доказательством).

30. *Теорема о нуле производной (теорема Ролля) и ее геометрический смысл. Контрпримеры: если не выполнено любое из трех условий, заключение может не иметь место.* Теорема Ролля (с доказательством). Геометрический смысл теоремы Ролля. Три контрпримера на каждое из условий: функция дифференцируема на интервале, имеет равные значения на концах отрезка, но разрывна в одном из концов; функция непрерывна на отрезке, имеет равные значения на концах, но не дифференцируема в одной из внутренних точек; функция непрерывна на отрезке, дифференцируема на интервале, но имеет различные значения на концах. Во всех трех случаях на интервале нет ни одной точки, в которой производная обратилась бы в ноль.
31. *Формула конечных приращений (формула Лагранжа). Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа: признак монотонности функции, критерий постоянства, достаточное условие равномерной непрерывности.* Теорема Лагранжа (с доказательством). Можно сказать, что формула в теореме называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений и пояснить, почему: если взять $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$, то получаем связь между (конечными) приращениями функции и аргумента: $\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x$. Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Следствие: если производная на интервале равна нулю, то функция на этом интервале постоянна (с доказательством). Следствие: производная больше или равна нулю (меньше или равна нулю) всюду на интервале тогда и только тогда, когда функция не убывает (не возрастает) на этом интервале; если производная больше нуля (меньше нуля) всюду на интервале, то функция возрастает (убывает) на этом интервале (с доказательством). Следствие: если функция дифференцируема на некотором промежутке (конечном или бесконечном) и производная на нем ограничена, то функция равномерно непрерывна на этом промежутке (с доказательством). Обратите внимание, что обратное неверно: например, функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на $(0, 1)$, но производная на этом интервале не ограничена. Следствие о точках разрыва производной на экзамен не выносится, его можно по желанию сформулировать без доказательства.
32. *Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши). Геометрический смысл теоремы Коши.* Теорема Коши (с доказательством). Стоит сказать о том, что формула в теореме называется формулой Коши или обобщенной формулой конечных приращений и пояснить так же, как и для формулы Лагранжа. Хорошо также упомянуть о том, что формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши при $g(x) = x$. Геометрический смысл теоремы Лагранжа (связь с производной параметрически заданной функции).
33. *Первое правило Лопиталья (правило Лопиталья для бесконечно малых функций).* Определение: отношение двух функций представляет собой неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в данной точке или на бесконечности. Теорема: первое правило Лопиталья (с доказательством). Поскольку это доказательство небольшое, можно привести пример, или даже два: когда теорема работает и когда – нет.
34. *Второе правило Лопиталья (правило Лопиталья для бесконечно больших функций).* Определение: отношение двух функций представляет собой неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в данной точке или на бесконечности. Теорема: второе правило Лопиталья (с доказательством). Здесь доказательство громоздкое, поэтому примеры – по желанию.
35. *Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (в форме Шлемильха-Роша).* Определение дифференциала высокого порядка. Определение многочлена Тейлора, формулы Тейлора (приближение функции многочленом), остаточного члена формулы Тейлора. Теорема: формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (с доказательством). **Если этот вопрос кажется совсем невыносимым, я готова его не включать в билеты, подумайте. Но саму формулу знать все равно надо, из нее выводятся Лагранж и Коши.**
36. *Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа, Коши и Пеано. Его оценка.* Определение многочлена Тейлора, формулы Тейлора (приближение функции многочленом), остаточного члена формулы Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме (без доказательства). Утверждение: формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

и Коши (с доказательством). Теорема: формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (с доказательством). Оценка остаточного члена (через форму Лагранжа, для функций, производные которых в данной окрестности ограничены единой константой).

37. *Разложение по формуле Тейлора-Маклорена элементарных функций. Примеры приложений формулы Тейлора для приближенных вычислений элементарных функций и вычисления пределов.* Понятие формулы Маклорена (формула Тейлора с центром в нуле). Пять основных разложений: экспонента, синус, косинус, логарифм и степень. Для всех надо написать остаток в форме Пеано, для первых трех – в форме Лагранжа (показать, что он стремится к нулю с ростом n , это легко). Для степени и логарифма – только Пеано. Пример приближенного вычисления (для синуса и косинуса, было на лекциях). Какой-нибудь пример вычисления предела.
38. *Понятие первообразной и неопределенного интеграла функции. Простейшие свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.* Определение первообразной для функции на данном интервале. Теорема: любые две первообразные для одной и той же функции на данном интервале могут отличаться только на константу (с доказательством). Определение неопределенного интеграла. Простейшие свойства: интеграл от линейной комбинации функций есть линейная комбинация интегралов, связь интегрируемости и дифференцируемости. Таблица основных интегралов (стоит написать вывод некоторых не вполне очевидных формул, как это было на лекции).
39. *Простейшие методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям).* Теорема: замена переменной в неопределенном интеграле (с доказательством). Пример. Теорема: интегрирование по частям в неопределенном интеграле (с доказательством). Пример.
40. *Интегрируемость в элементарных функциях класса рациональных дробей (с вещественными коэффициентами).* Этот вопрос я не буду включать в билеты, потому что спрашивать такое на экзамене – это издевательство.
41. *Интегрируемость в элементарных функциях дробно-линейных иррациональностей и других классов функций.* Интегрирование дробно-линейных иррациональностей (замена соответствующего корня на новую переменную). Интегрирование иррациональностей, содержащих под корнем квадратных трехчлен (подстановки Эйлера). Интегрирование выражений вида $\cos^n x \cdot \sin^m x$, где n, m – целые. Интегрирование рациональных функций от синуса и косинуса (универсальная тригонометрическая подстановка). В каждом из случаев надо показать, как соответствующей заменой свести задачу к интегрированию рациональной дроби. Можно привести какой-нибудь простой пример к одному из случаев. Любые другие классы функций – по желанию.
42. *Метод хорд и его обоснование.* Постановка задачи: нахождение нулей функции на отрезке. Идея: замена уравнения $f(x) = 0$ на эквивалентное $F(x) = x$ подходящим выбором функции F . Определение итерационной последовательности, построенной по функции F . Лемма о том, что итерационная последовательность сходится к корню уравнения. Условия на функцию f . Выбор функции F в методе хорд. Теорема: обоснование метода хорд (с доказательством). Геометрический смысл метода хорд. Оценка погрешности метода хорд.
43. *Метод касательных и его обоснование.* Постановка задачи: нахождение нулей функции на отрезке. Идея: замена уравнения $f(x) = 0$ на эквивалентное $F(x) = x$ подходящим выбором функции F . Определение итерационной последовательности, построенной по функции F . Лемма о том, что итерационная последовательность сходится к корню уравнения. Условия на функцию f . Выбор функции F в методе касательных. Теорема: обоснование метода касательных (с доказательством). Геометрический смысл метода касательных. Оценка погрешности метода касательных (точно такая же, как в методе хорд).